

Un problema de agrimensura para la enseñanza de la Trigonometría con estudiantes de Ingeniería Civil

A problem of surveying for teaching trigonometry students from Civil Engineering

Lic. Yoana Acevedo Rico

Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga.

Correo electrónico: yoana.acevedo@upb.edu.co

Recibido: 1 de agosto de 2014

Aceptado: 12 de diciembre de 2014

Resumen:

En este artículo se aborda una investigación de aula en la asignatura Geometría y Trigonometría con estudiantes de primer semestre de Ingeniería Civil de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga (Colombia). Dicha investigación comprende el diseño, implementación y evaluación de una estrategia didáctica. La estrategia está enmarcada en la resolución de problemas desde la perspectiva del aprendizaje significativo de David Ausubel y la técnica para solucionar problemas de George Polya. El problema formulado a los estudiantes hace parte de las aplicaciones que históricamente se han asociado a la Agrimensura. Es una investigación de métodos mixtos, combinando el método cuantitativo, al validar la implementación de la estrategia, a través de la comparación de los resultados obtenidos en una prueba escrita por dos grupos (experimental y control); con el método cualitativo, a través de observaciones realizadas por el docente-investigador, al grupo experimental en la implementación de la estrategia. En dicho grupo se observó cambio de hábitos de estudio, reflejado en una mayor organización del tiempo, mayor habilidad en la toma de apuntes, mayor atención y concentración en clase, entre otros; así como un mayor rendimiento en la prueba escrita, específicamente en la solución de problemas.

Abstract:

This article describes a classroom investigation is addressed in Geometry and Trigonometry course with freshmen of Civil Engineering, Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga (Colombia). This research includes the design, implementation and evaluation of a teaching strategy. The strategy is framed in solving problems from the perspective of technical troubleshooting George Polya meaningful learning of David Ausubel. The problem formulated students is part of the applications that have historically been associated with surveying. It is a mixed methods research, combining quantitative method to validate the implementation of the strategy through the comparison of the results obtained in a letter written by two groups (experimental and control) test; the qualitative method, through observations of the teacher-researcher to the experimental group in the implementation of the strategy. In the experimental group was observed that changed their habits, reflected in a greater organization of time, more skill in making observed notes, more attention and concentration in class, among others; and greater performance in the test, specifically in solving problems.

Palabras Clave:

Agrimensura, aprendizaje significativo, Trigonometría, Ingeniería Civil, resolución de problemas.

Key Words:

Surveying, meaningful learning, Trigonometry, Civil Engineering, solving problems.

Introducción.

Un 45% de la población estudiantil deja la universidad por causa del bajo rendimiento académico en los primeros semestres (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2008). En las asignaturas del ciclo básico de la Escuela de Ingeniería (Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga, 2012), es preocupante el bajo rendimiento de los estudiantes, especialmente en el primer semestre.

Un estudio sobre la relación de dependencia entre variables de tipo sociodemográficas, económicas, familiares, académico y motivacional con la variable: aprobación de la asignatura cálculo diferencial (asignatura que junto con la asignatura *Geometría y Trigonometría*, hacen parte de las asignaturas de matemáticas del primer semestre de los estudiantes de la escuela de ingeniería) permitió identificar la relación de dependencia de la variable con 14 variables de tipo académico y motivacional tanto en las clases de matemáticas durante la secundaria como en las del primer semestre de la universidad, entre las que resaltamos las que reflejan ausencia de hábitos de estudio (Acevedo & Ortiz, 2013, p.1887-1896).

En el Modelo pedagógico integrado (Universidad Pontificia Bolivariana, 2009) se concibe el aprendizaje como promotor de construcción de conocimiento y desarrollo de competencias: habilidades, destrezas, actitudes y valores en busca de la formación integral del estudiante con autonomía y un docente generador de espacios para lograr tales fines en un proceso dinámico y en continuo cambio.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores se identificaron en la investigación, dos referentes teóricos que permiten diseñar una estrategia didáctica pertinente y eficaz a las necesidades expuestas, por una lado se hace necesario que el estudiante sea protagonista de su proceso de aprendizaje y por otro, encontramos en la resolución de problemas, una alternativa para alcanzar dicho aprendizaje. Es así, como nuestro trabajo estará enmarcado desde el aprendizaje significativo de David Ausubel y la resolución de problemas de George Polya.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras. (Ausubel, 1983, p.84).

Ahora bien, el aprendizaje significativo de las matemáticas, es el que se lleva a cabo a través de la resolución de problemas, ya que permite involucrar de manera activa al estudiante en la construcción y aplicación del conocimiento (Camacho & Santos, 2004, p.45-60). El problema es un conjunto de situaciones en un contexto dado, nuevo para el estudiante, que permite activar los conocimientos previos de los estudiantes, es decir, explicitar lo que saben y lo que no para resolverlo y detectar las necesidades de aprendizaje. Adicionalmente, posibilita integrar conocimientos de diferentes áreas y facilita la comprensión. (Mérida, 2005, p.31-46). Para solucionar el problema, el estudiante debe dar cuatro pasos propuestos por George Polya: *Entender el problema; configurar un plan para solucionar el problema, ejecutar dicho plan y mirar hacia atrás (contrastar la solución con los datos iniciales)*. (Fuentes, 2008, p.36-58).

El problema formulado hace parte de las aplicaciones que a la vida diaria ha proporcionado la agrimensura, entendida como la rama de la topografía destinada a la delimitación de superficies, la medición de áreas y la rectificación de límites (aunque en la actualidad la comunidad científica internacional reconoce que es una disciplina autónoma), produce documentos cartográficos e infraestructura virtual para establecer planos, cartas y mapas, dando publicidad a los límites de la propiedad o gubernamentales. La agrimensura ha sido un elemento esencial en el desarrollo del entorno humano, desde el comienzo de la historia registrada (hacia el 3000 a. C.); es un requisito en la planificación y ejecución de casi toda forma de la construcción.

Por consiguiente, el objetivo de este trabajo es presentar los resultados de la aplicación de una estrategia didáctica de metodología y evaluación, a través de la resolución de un problema, que permite la aplicabilidad de las asignaturas Geometría y Trigonometría en la Ingeniería, específicamente, ingeniería civil. Dicha estrategia se implementa con estudiantes de ingeniería civil matriculados en el primer semestre de 2013 en la asignatura de geometría y trigonometría, posteriormente se evalúa a través del seguimiento del docente-observador de las producciones de los estudiantes durante la implementación y una prueba escrita finalizando la implementación, comparando los resultados de dicha prueba con un grupo control.

Métodos

El trabajo de investigación es producto de una continua reflexión que permite situar el diseño, la implementación y la evaluación de la propuesta didáctica en el objeto de estudio. El diseño de la propuesta didáctica surge de la reflexión de la práctica de enseñanza docente-investigador, contrastados con el marco teórico, haciéndola pertinente a las necesidades de conocimiento matemático de la población. Es así como la implementación está permeada por la continua reflexión de los hallazgos que se van encontrando, tanto en el grupo objeto (en este grupo se implementa la propuesta didáctica), como el grupo control (en este grupo no se implementa).

La prueba escrita se aplica a los dos grupos, los datos recolectados de ésta, permitirán realizar un contraste entre los hallazgos encontrados en la implementación de la propuesta, la teoría y la evaluación del proceso realizado.

Es una investigación de métodos mixtos, combinando la metodología *cuantitativa*, para validar la implementación de la estrategia a través de la comparación de los resultados obtenidos en una prueba escrita con un grupo objeto con respecto a otro grupo de control y la metodología *cualitativa* por el continuo acercamiento entre el docente-investigador y el objeto de estudio a través del método de observación participante durante la implementación de la estrategia propuesta.

La prueba escrita se realiza con dos grupos (experimental G1 y control G2) de estudiantes de Ingeniería Civil de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Pontificia Bolivariana, matriculados por primera vez en la asignatura Geometría y Trigonometría en el segundo semestre académico de 2013.

El problema formulado en la implementación de la estrategia: *Encontrar las dimensiones (ancho, alto, profundo) del edificio X de la UPB, sin utilizar mediciones directas y utilizando la trigonometría*. Dicha solución debe comprender tres partes: construcción de un medidor de ángulos (de elevación, depresión y barrido), una estrategia trigonométrica para encontrar los datos experimentalmente y una estrategia (aplicación de Smartphone) que evalúe la precisión de los datos hallados. El tiempo disponible para la solución del problema son 8 semanas y será utilizado el tiempo de trabajo independiente del estudiante (8 horas semanales) y consulta personalizada con el docente (2 horas semanales). Se conforman 13 equipos de trabajo (de 3 personas por equipo).

Además de la observación participante del profesor investigador en el proceso, se utilizaron para recoger y registrar los datos obtenidos diferentes técnicas e instrumentos (aplicaciones de medición y cálculo para Smartphone, la construcción de un medidor de ángulos, la comprobación de las dimensiones por el docente-investigador con el metro láser, la presentación de resultados en una jornada de socialización de las soluciones, la captura de imágenes del proceso y la representación gráfica de cada solución, entre otros.) A partir de los cuales se realizaron los análisis.

Resultados

A continuación se realiza un análisis de las observaciones realizadas por el maestro investigador al grupo G1, dicho análisis se dividió en las cuatro fases para solucionar un problema, según Polya.

- a) *Comprensión del problema*: Los estudiantes deben realizar investigaciones sobre aparatos caseros para medir ángulos, teniendo en cuenta las especificaciones propias de los edificios que van a medir, así como determinar la pertinencia de la estrategia trigonométrica seleccionada, según los ejes temáticos desarrollados en clase propios de la agrimensura. Cabe resaltar que las aplicaciones de Smartphone para medición deben descargarse y saber usarlas para realizar la medición con precisión.

-*Observaciones*-La recopilación de la información es muy general, en algunos grupos se observa un mayor avance, puesto que se concentraron en el problema y su descomposición, otros por el contrario deben ser orientados por la docente. Finalizado el tiempo para esta fase, en la gran mayoría de los grupos se ha entendido el problema.

- b) *Concepción de un plan*: Los estudiantes deben construir el medidor de ángulos, realizar pruebas de precisión a través de cálculos para hallar las dimensiones de una puerta, un árbol y una persona y hacer los ajustes necesarios al artefacto construido. La estrategia trigonométrica debe ser utilizada para ajustes del medidor de ángulos. Las aplicaciones para medición descargadas deben ser comprobadas y los estudiantes deben saber manipularlas.

-*Observaciones*-Cada grupo presenta su medidor de ángulos y tienen una estrategia trigonométrica para la altura del edificio. Se presentan diversas dificultades para hallar el ancho y la profundidad de los edificios por la complejidad del terreno donde se encuentran. Se observa poca precisión en la medición al usar las aplicaciones para Smartphone descargadas. Se observa en general, compromiso y motivación por solucionar el problema.

- c) *Ejecución del plan*: Los estudiantes deben realizar las mediciones del edificio asignado (diferente por equipo), realizar varias tomas de ángulos y calcular un promedio entre los datos experimentales, posteriormente se deben realizar los cálculos a través de la estrategia trigonométrica, además se hallan las mediciones a través del software descargado.

-*Observaciones*- Algunos equipos encuentran dificultades en el momento de la toma de datos, por no tener en cuenta la forma del terreno, deben realizar ajustes para encontrar el lugar para el observador, otra de las dificultades fue el margen de error alto cuando se realizan los cálculos trigonométricos, como consecuencia, deben realizar varias mediciones desde diferentes puntos de observación, sin embargo, se observó una buena precisión al utilizar el software y esto facilita la comprobación y validez de los datos experimentales obtenidos. Los grupos han cumplido con la entrega de las tareas (talleres con situaciones problema) para reforzar y profundizar en los temas de trigonometría del triángulo.

- d) *Visión retrospectiva*: Los estudiantes deben comparar los resultados experimentales, los datos obtenidos con el software y la medición que realiza el docente-investigador con el metro láser.

-*Observaciones*- Al encontrar datos experimentales poco precisos, los equipos debieron ajustar el instrumento, así como la precisión al realizar la observación,

contrastar los datos obtenidos por su solución, los de la aplicación descargada y los del metro láser, para analizar y concluir sobre el plan trazado y ejecutado. Al finalizar esta etapa todos los estudiantes han encontrado la validez de su propuesta con una buena precisión.

Agregamos a este análisis, la jornada de socialización de las soluciones de todos los grupos, así como el análisis de los datos obtenidos a través de la prueba escrita.

e) *Socialización*: Los estudiantes deben socializar la experiencia y evaluar el proceso desarrollado por los otros equipos y el propio.

-*Observaciones*- La calidad de los trabajos realizados y la continua participación de los otros equipos refutando o validando los procedimientos realizados por sus compañeros, permitió contrastar las múltiples soluciones que tenía este problema. Cabe resaltar que los estudiantes manejaban el tema con mayor fluidez y estuvieron muy preocupados por la precisión de los datos tomados y calculados por sus compañeros.

A continuación se presentan algunas soluciones.

1. *Transportador casero para ángulos de elevación y depresión. Desde un mismo punto de observación, se toma un ángulo al extremo superior (elevación): θ_1 e inferior (depresión): θ_2 y la distancia del punto de observación al edificio (en línea recta): m .¹*



Fig. 1 Transportador casero

¹ Tomado del grupo 12.

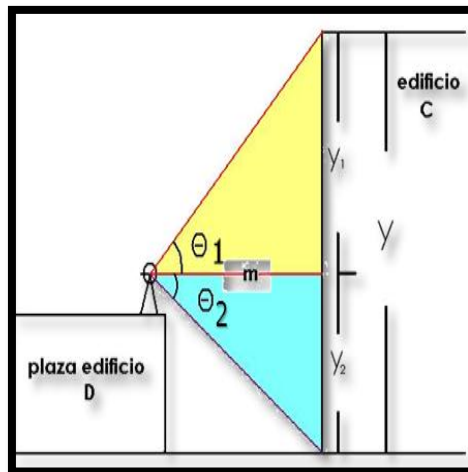


Fig.2 Gráfica del modelo trigonométrico

Para calcular la altura y : $y = y_1 + y_2$; con $y_1 = m \tan \theta_1$; $y_2 = m \tan \theta_2$

2. Brújula para medir ángulos de barrido y clinómetro para ángulos de elevación; para la profundidad se tomaron dos ángulos desde cada uno de los extremos izquierdo y derecho del edificio hacia un mismo punto de observación: α y β . Se toma la distancia desde el mismo punto de observación a uno de los ángulos hallados: y .²



Fig.3 Brújula y clinómetro

² Tomado del grupo 2.

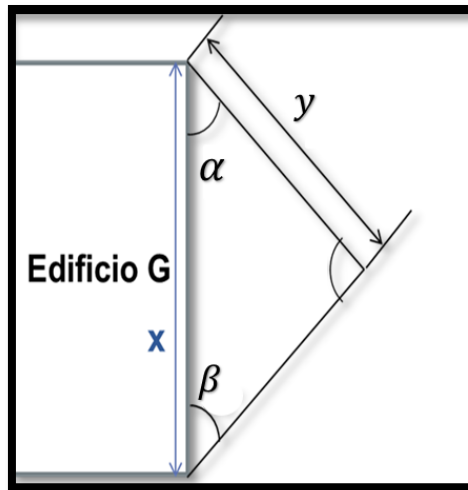


Fig.4 Gráfica del modelo trigonométrico

Para calcular la profundidad x : $\frac{\text{sen}(180-(\alpha+\beta))}{x} = \frac{\text{sen}\beta}{y}$ (Ley del seno)

3. Medidor de ángulos de elevación, depresión y barrido, para el ancho se tomó el ángulo de barrido del extremo izquierdo a derecho del edificio: θ , sujetos por dos pitas de dimensión conocida: A y B.³



Fig.5 Medidor de ángulos

Para calcular el ancho C : $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos\theta$ (Ley del coseno)

³ Tomado del grupo 4.

4. Sextante para medir ángulos de elevación, para medir la altura se tomaron dos ángulos de elevación desde dos puntos de observación diferentes (en el piso) a la parte superior del edificio: α y β . Se mide la separación entre cada punto de observación: x .⁴



Fig.6 Sextante

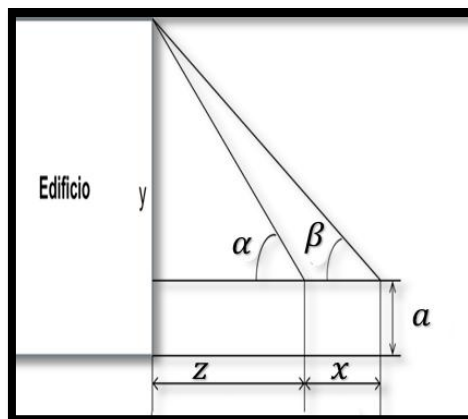


Fig.7 Gráfica del modelo trigonométrico

Para calcular la altura $y + a$: $\tan \alpha = \frac{z}{y}$ (1) ; $\tan \beta = \frac{x+z}{y}$ (2) (a es conocida y se resuelve el sistema 2x2)

⁴ Tomado del grupo 6.

- 5.** *Goniómetro casero para ángulos de elevación y depresión; para la altura se tomaron desde un mismo punto de observación (en el piso) dos ángulos de elevación, uno hasta la base de una ventana del edificio (ubicada en el último piso): α y otro hasta la parte superior de la misma ventana: β . Se midió la altura de la ventana: y .⁵*



Fig.8 Goniómetro casero

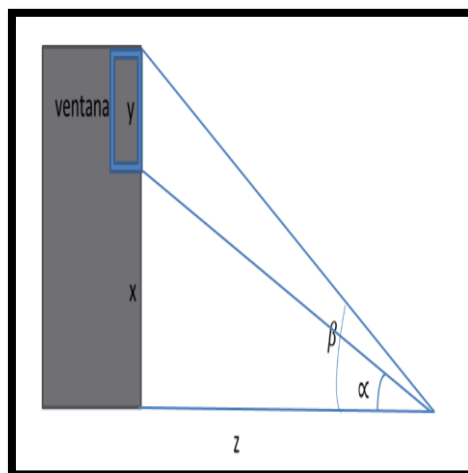


Fig.9 Gráfica del modelo trigonométrico

⁵ Tomado del grupo 3.

Para calcular la altura $x + y$: $\tan\alpha = \frac{x}{z}$ (1) ; $\tan\beta = \frac{x+y}{z}$ (2) (se resuelve el sistema 2x2)

- f) *Prueba escrita*: Los estudiantes del grupo objeto y control realizan la prueba escrita. (Anexo 1)

-*Análisis de los datos*- A través de la prueba final se evalúa la estrategia didáctica, comparando los resultados obtenidos por el grupo experimental G1 con el que se implementa la estrategia didáctica, y el grupo control G2 con los que no se implementa. De los resultados obtenidos en la prueba, se puede concluir que: El 44.74% de los estudiantes del grupo G2 obtienen una nota por debajo de 2.0 sobre 5 que era el máximo valor. En contraste con el grupo G1 con notas por encima de 2.0 en toda la población. A continuación en la Tabla 1 se muestran los resultados de los dos grupos: Nota Vs Personas.



Tabla 1 Resultados de la prueba escrita

En la prueba escrita se observa mayor razonamiento de los estudiantes del grupo G1 que los estudiantes del grupo G2, ya que se justifican las respuestas con un procedimiento trigonométrico más preciso. De 6 problemas de agrimensura formulados, se analizaron los siguientes indicadores de evaluación: *Gráfica* o bosquejo que representa la situación problema, *Datos* que dan y piden, relacionados entre sí a través de la gráfica. *Modelo* trigonométrico y procedimiento que permita solucionar el problema. *Solución* del problema. *Coherencia* entre los datos encontrados y lo que se pida en el problema.

En la Tabla 2 se muestran los resultados por indicadores de evaluación en los dos grupos: Indicadores Vs Personas.

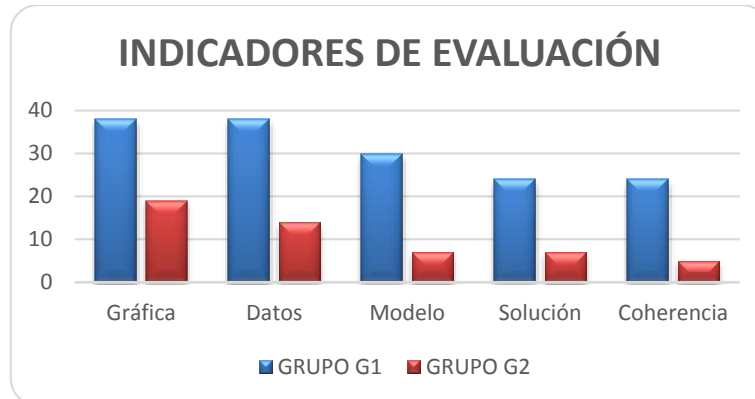


Tabla 2 Indicadores de evaluación de la prueba escrita

Estos datos muestran con claridad la diferencia positiva, lograda en los resultados del grupo G1, sobre los del grupo G2, en todos los indicadores estudiados. Lo que permite inferir el impacto de la solución de problemas de agrimensura con métodos geométricos y trigonométricos, en la significatividad de los conocimientos; que parece expresarse con mayor relevancia en los resultados del Grupo G1.

Discusión de los resultados

Se encontraron algunas similitudes en los resultados obtenidos por (Tangarife, 2012), siendo esta una investigación con estudiantes de primer semestre de ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, en la asignatura de Trigonometría:

"El aprendizaje significativo obtenido con los estudiantes del curso de matemáticas básicas se genera gracias a las estrategias didácticas utilizadas como fueron, la solución de problemas y el trabajo cooperativo, ya que en su aplicación se logró poco a poco que los estudiantes se sintieran motivados y comprometidos con su proceso de aprendizaje. Dentro del aula se generó un ambiente de confianza donde se podía preguntar sin temor al ridículo, el trabajo cooperativo propició la participación y la responsabilidad, cada uno se preocupaba por el aprendizaje del otro y buscaban espacios donde pudieran mejorar y compartir los conocimientos adquiridos".

La utilización de las horas del trabajo independiente en tareas concretas semanales, permitió a los estudiantes la articulación y apropiación de los conocimientos vistos en clase con la solución del problema. Al tenerse en cuenta sugerencias como:

"Proponer como trabajo extra clase una serie de tareas, talleres y consultas que permitan al estudiante profundizar sobre la temática trabajada durante las clases y logre afianzar sus conocimientos". (Tangarife, 2012)

Encontramos un acercamiento con (Rodríguez, 2005), al situar la resolución de problemas como eje integrador del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Así mismo,

"...la asunción de responsabilidad por parte de los alumnos -como protagonistas en la construcción de la respuesta a la cuestión- sobre aspectos del proceso de estudio que normalmente quedan bajo la responsabilidad única del profesor...".

El aprendizaje significativo surge además, cuando el estudiante encuentra una aplicación del conocimiento (Camacho & Santos, 2004, p.45-60), en este sentido encontramos una gran similitud, ya que fueron los estudiantes quienes debían aplicar sus conocimientos adquiridos en trigonometría para solucionar un problema de agrimensura (muy pertinente a su carrera: ingeniería civil), ya que, encontraron una forma trigonométrica para medir sin utilizar medición directa las dimensiones de un edificio, usaron un medidor de ángulos (construido en algunos casos por ellos mismos), utilizaron el decámetro o metro láser para la medición de grandes longitudes, así como la aplicación de Smartphone que realice dichas tareas.

Conclusiones

En la socialización los estudiantes enriquecieron sus experiencias con las de sus compañeros obteniendo una diversidad de soluciones al mismo problema. Entre las conclusiones realizadas por los mismos estudiantes al finalizar su experiencia, en la jornada de socialización, se encuentran: una mayor apropiación de los conceptos de trigonometría y un verdadero uso de estos conceptos en la ingeniería civil.

El método de Polya para la solución de problemas permite encontrar una solución pertinente y eficaz del problema sobre la base de la reflexión continua.

Al lograrse la articulación de las horas de presencialidad con las horas de trabajo independiente del estudiante para buscar la solución del problema, se muestra una posibilidad de conectar las tareas escolares con lo visto en clase significativamente.

Se evidencia una modificación en los hábitos de estudio del grupo G1 durante el proceso:

- Mayor organización del tiempo, reflejado en el aprovechamiento de las horas de trabajo independiente en la realización de tareas semanales.
- Mayor atención y concentración en clase, reflejado en una mayor habilidad en la toma de apuntes, así como en el cumplimiento de tareas durante la clase.

Los resultados obtenidos por los estudiantes del grupo G1 en la prueba escrita comparados con el grupo G2, evidencian en el grupo G1, una mayor apropiación de los conocimientos adquiridos y la utilización de los mismos en la solución de los problemas planteados.

Es conveniente realizar réplicas de la estrategia didáctica en otros grupos que permita reforzar y profundizar el diseño de la metodología y evaluación implementada.

Referencias Bibliográficas

1. Acevedo, Y. & Ortiz, J. (2012). Mortalidad académica en cálculo diferencial. Un análisis de dependencia entre variables sociodemográficas, económicas, familiares, académicas, motivacionales y la aprobación de la asignatura en los estudiantes de primer semestre de la escuela de ingeniería de la Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga. Actas del VII CIBEM, 1887-1894.
2. Ausubel, D. (1983). Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México: Editorial Trillas.
3. Camacho, M. & Santos M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. Revista Números, 45-60.
4. Mérida, R. (2005). Una investigación sobre aprendizaje basado en problemas en el marco del prácticum de magisterio. Investigación en la Escuela, 57, 31-46.
5. Ministerio de Educación Nacional. (2008). Análisis de determinantes de la deserción en la educación superior colombiana con base en el SPADIES. Bogotá, Colombia: Autor. Recuperado de
6. http://www.mineducacion.gov.co/sistemasdeinformacion/1735/articles-254702_determinantes_desercion.pdf
7. Rodríguez, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico (tesis de doctor). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
8. Tangarife, B. (2012). Solución de problemas y trabajo cooperativo: una estrategia didáctica a desarrollar en Trigonometría Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.
9. Universidad Pontificia Bolivariana (2009). Modelo Pedagógico integrado. Medellín, Colombia: Autor.
10. Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga (2012). Estadísticas rendimiento académico: Informe del departamento de Ciencias Básicas 2006-2012. Bucaramanga, Colombia: Autor.

Anexo 1 Prueba escrita empleada en la experiencia (I)

 Universidad Pontificia Bolivariana	DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA Prueba escrita	NOTA
	NOMBRE:	

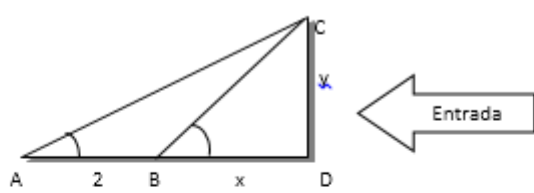
OBSERVACIONES IMPORTANTES

- La interpretación forma parte de la evaluación, por consiguiente, *No se responden preguntas.*
- No se permite el intercambio de calculadoras y cualquier otro material para el parcial.
- APAGUE EL CELULAR.**
- Tiempo máximo para la evaluación: 120 minutos.

I. RESPUESTA DE SELECCIÓN MÚLTIPLE. Seleccione una respuesta para cada situación (las dos situaciones comparten el mismo enunciado).

A los estudiantes del curso de Geometría y Trigonometría de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Pontificia Bolivariana se les ha formulado el siguiente problema: **Encontrar la altura del edificio J sin utilizar mediciones directas y utilizando la trigonometría.** A continuación mostraremos dos soluciones de las múltiples que tiene este problema, utilizando la trigonometría: (Nos ubicaremos en las dos soluciones en la entrada de la Biblioteca Benedicto XVI).

1. Primera solución: Un observador B se coloca a una distancia x de la entrada y realiza la medición de ángulo de elevación a la parte superior del edificio de 70° , a 2m se encuentra un observador A y registra un ángulo de 62° . Con estos valores registrados podemos afirmar que:



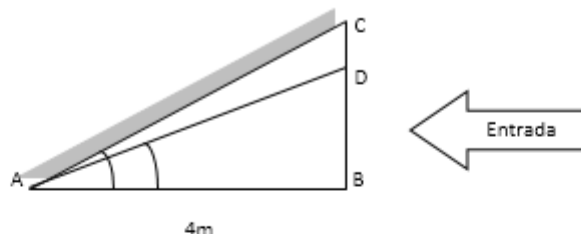
a. Es posible encontrar la altura porque aplicaríamos la **ley del seno** en el triángulo ACB para hallar la longitud del lado BC y luego utilizaríamos la **razón sen** en el triángulo BCD para hallar la longitud de y .

b. Es posible hallar la altura si hubiesen encontrado el valor de x para utilizar la **razón tan** en el triángulo BCD y sobraría el ángulo A dado.

c. Es posible encontrar la altura porque aplicaríamos la **ley del coseno** en el triángulo ACB para hallar la longitud del lado AC y luego utilizaríamos la **razón sen** en el triángulo ACD para hallar la longitud de y .

d. Es posible hallar la altura si hubiesen encontrado el valor de x para utilizar la **razón tan** en el triángulo ACD y sobraría el ángulo B dado.

2. Segunda solución: Uno de los estudiantes se hace en la azotea del edificio J y un observador se ubica a una distancia de 4 m desde la entrada a la biblioteca, registrando un ángulo de elevación hasta los pies del estudiante de 70° y otro ángulo hasta la parte superior de la cabeza de 72.5° . Después de hallar los registros e intentar calcular la altura encuentran que:



- Con estos valores es posible hallar la altura del edificio sólo conociendo el ángulo hasta la parte superior del edificio, y así utilizar la razón $\sec\theta$ en el triángulo ABD para calcular el valor de BD, y el ángulo registrado con la persona en la azotea no era necesario.
- Con estos valores es posible hallar tanto la altura del edificio aplicando la razón $\tan\theta$ en el triángulo ADB, como la altura del estudiante aplicando la razón $\tan\theta$ en el triángulo ACD.
- Con estos valores es posible hallar la altura del edificio sólo conociendo el ángulo hasta la parte superior del edificio, y así utilizar la razón $\tan\theta$ en el triángulo ABD para calcular el valor de BD, y el ángulo registrado con la persona en la azotea no era necesario.
- Con estos valores es posible hallar tanto la altura del edificio aplicando la razón $\tan\theta$ en el triángulo ADB, como la altura del estudiante aplicando la razón $\sec\theta$ en el triángulo ACD.

II. PREGUNTAS ABIERTAS. Realice una gráfica que modele las siguientes situaciones problema. Resuelva tres de las cuatro.

- Una bandera está en la orilla de un acantilado de 50 pies de altura, en la orilla de un río de 40 pies de ancho. Un observador en la orilla opuesta del río mide un ángulo de 9° entre su visual a la punta del asta y su visual a la base del asta de una bandera que se encuentra arriba del acantilado. Calcule la altura del asta.
- Desde un mirador de 1000 pies de la base del monte Rush More, el ángulo de elevación de la coronilla de la cabeza esculpida de George Washington mide 80.05° , mientras que el ángulo de elevación hasta la punta del mentón es de 79.946° . Calcule la altura de la cabeza de George Washington.
- Dos barcos salen de un puesto a las 7:00 a.m. Uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene un rumbo de $N47^\circ O$ y el rumbo del otro es $S20^\circ O$, ¿cuál es su separación a las 11:00 a.m. de ese día?
- Un edificio está al lado de una colina que baja formando un ángulo de 15° . El sol está sobre la colina y desde el edificio tiene un ángulo de elevación de 42° . Calcule la altura del edificio, si su sombra mide 36 pies de longitud.

Autor:

Yoana Acevedo Rico

Licenciada en matemáticas, Magister en Pedagogía, Docente de matemáticas, Universidad Pontificia Bolivariana Seccional Bucaramanga.